Résolution de 2-SAT

Inspiration : Computational complexity, Papadimitriou
théorème 9.1

Motivation : · SAT et même 3-SAT sont NP-complets
· On peut montrer que 2-SAT est dans NL à l'aide de graphes.

Problème : 2-SAT
Entrée : Formule φ en CNF où chaque est composée d'au-plus 2 littéraux.
Sortie : Décider s'il existe une valuation v des variables $x_1, \dots, x_n$ de φ telle que $v(\varphi) = T$.

On peut supposer que toutes les clauses contiennent 2 littéraux.

Solution naïve : test de toutes les valuations : complexité temporelle de 2^n dans le pire cas.

Idée : représenter la formule sous forme d'un graphe où les littéraux sont les noeuds et les clauses les arcs.

Définition : Soit φ une formule sous forme 2-CNF.
On définit $G(\varphi) = (V, E)$ le graphe associé de φ par :
· $V = \{x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n\}$
· $E = \{(\alpha, \beta) \mid \neg\alpha \vee \beta \in \varphi\}$

Idée : Les arcs représentant des implication logiques.

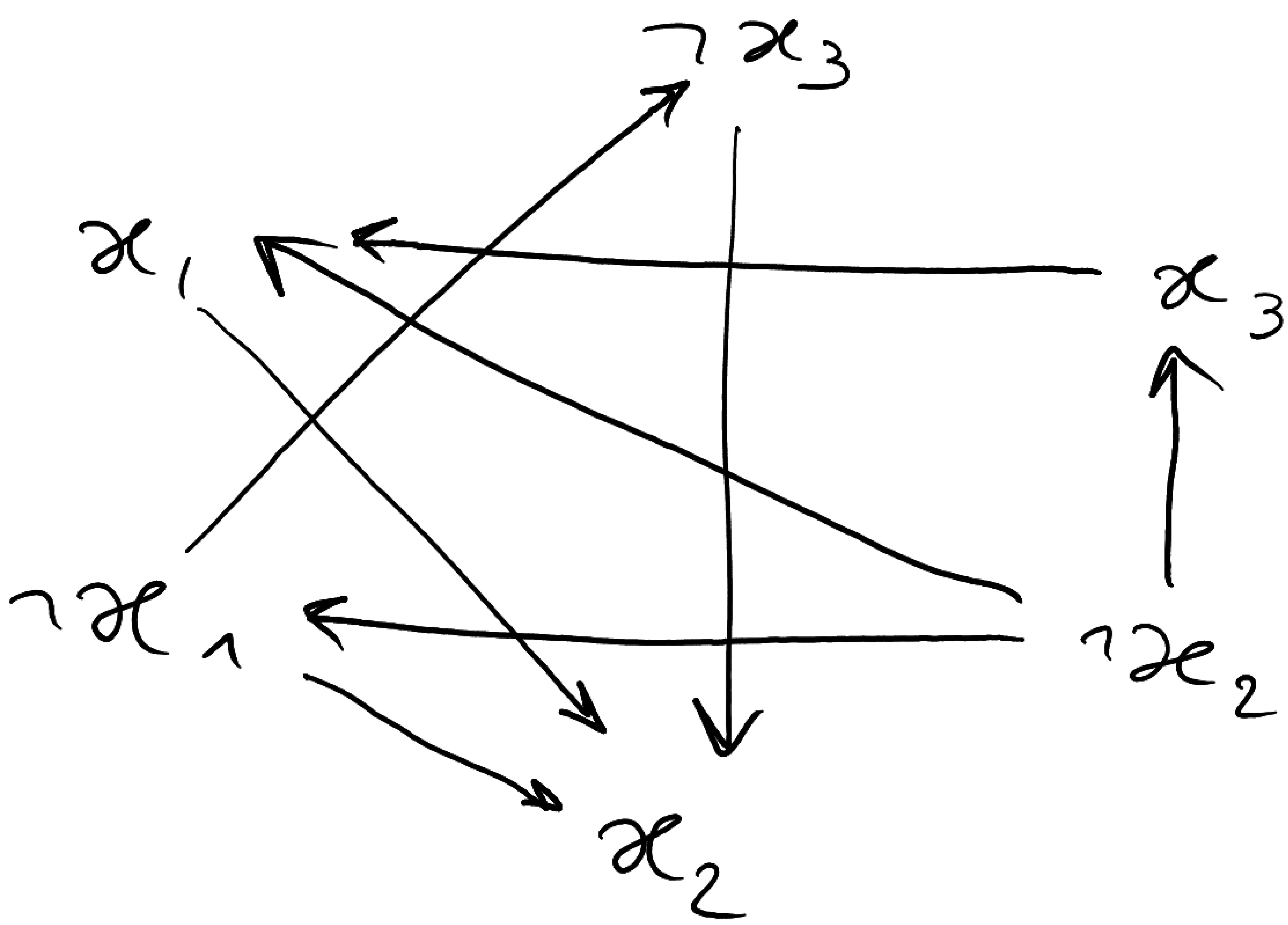
Exemple : $\varphi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$

Graphe associé : $G(\varphi)$

- Littéraux : x_1, $\neg x_1$, x_2, $\neg x_2$, x_3 et $\neg x_3$
- Arêtes : $x_1 \vee x_2 \mapsto \neg x_1 \to x_2$ et $\neg x_2 \to x_1$

  $x_1 \vee \neg x_3 \mapsto \neg x_1 \to \neg x_3$ et $x_3 \to x_1$

  ...



Il n'existe pas de tel chemin dans ce graphe, φ est donc satisfiable (par $x_1 \mapsto V$, $x_2 \mapsto V$, $x_3 \mapsto F$).

Théorème : Soient φ une formule sous forme 2-CNF, et $G(\varphi) = (V, E)$. Alors, φ est insatisfiable $\Leftrightarrow \exists x \in V$ tel que $x \to^* \neg x$ et $\neg x \to^* x$ dans $G(\varphi)$.

Preuve : $\Rightarrow$ Si un tel chemin existe pour x, alors par l'absurde : si $G(\varphi)$ est satisfiable soit T tel que $T(\varphi) = V$.

On suppose $T(x) = V$, donc $T(\neg x) = F$. Comme $x \rightarrow^* \neg x$, alors il y a un arc (α, β) tel que $T(\alpha) = V$ et $T(\beta) = F$.

Or, $(\alpha, \beta) \in E$ donc $\neg\alpha \vee \beta \in \varphi$, donc $T(\neg\alpha \vee \beta) = F$.

absurde.

$\Leftarrow$ S'il n'y a pas de telle variable, on construit alors la valuation satisfaisant φ. On répète la procédure suivante :

- prendre un littéral α non valué tel que $\alpha \not\rightarrow^* \neg\alpha$.
- associer à α et à tous les littéraux accessibles depuis α V, et F à leurs négations (co-accessibles).

Comme il n'y a pas de chemin $x \rightarrow^* \neg x$ et $\neg x \rightarrow^* x$, alors toutes les variables sont valuées, et toutes les clauses sont satisfaites car les arcs (représentant $\Rightarrow$) transmettent V.

La valuation ainsi construite satisfait φ.

Corollaire : 2-SAT est dans NL.

Preuve : On a $NL = coNL$, donc il suffit de montrer que 2-UNSAT est dans coNL : on choisit en espace non déterministe log une variable x et on vérifie si $x \rightarrow^* \neg x$ et $\neg x \rightarrow^* x$.